Предел и непрерывность функции нескольких переменных

Определение: Пусть $n \in \mathbb{N}$, *n-мерным действительным числовым пространством* называется множество всевозможных упорядоченных наборов $(x_1;\, x_2;\, \ldots;\, x_n)$ из n действительных чисел. Обозначение: $\mathbb{R}^n$.

В $\mathbb{R}^n$ можно ввести расстояние между двумя точками $M_1(x_1; x_2; \ldots; x_n)$, $M_2(y_1; y_2; \ldots; y_n)$ по следующей формуле:

$$\rho(M_1;\, M_2) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2} \quad \textit{(Евклидова метрика).}$$

Определение: При $\varepsilon > 0$ *$\varepsilon-$окрестностью точки $\overline{a} \in \mathbb{R}^n$* называется множество

$$\mathbf{U}_\varepsilon(\overline{a}) := \left\{\overline{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, \rho(\overline{x};\, \overline{a}) < \varepsilon\right\}$$

Множество $\mathbf{U}_\varepsilon(\overline{a})$ называют *открытым шаром в $\mathbb{R}^n$*.

Другой вариант окрестности в $\mathbb{R}^n$ получим, если возьмём n положительных действительных чисел $d_1,\, d_2, \ldots, d_n$. Тогда множество

$$\left\{\overline{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; |x_1-a_1| < d_1;\, |x_2-a_2| < d_2; \ldots; |x_n-a_n| < d_n\right\}.$$

называется *n-мерным открытым параллелепипедом.*

Определение (Коши):

$$A = \lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(\overline{x}) \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon>0\;\exists\,\delta(\varepsilon;\,\overline{x}_0)>0\,:\,\forall\overline{x}\;\; 0<\rho(\overline{x};\,\overline{x}_0)<\delta \;\Rightarrow\; |f(\overline{x})-A|<\varepsilon.$$

Определение (Гейне):

$$A = \lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(\overline{x}) \;\Leftrightarrow\; \forall\,\{\overline{x}_n\},\;\; \overline{x}_n \neq \overline{x}_0,\;\; \overline{x}_n \to \overline{x}_0 \quad f(\overline{x}_n) \to A.$$

Определение: При $n = 2$ нами получено определение *двойного предела.*

Определение: Функция $f(\overline{x})$ называется *непрерывной в точке x_0*, если $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(\overline{x}) = f(\overline{x}_0)$.

Определение *(условие Коши в точке $\overline{x}_0$):*

$$\forall\varepsilon>0\;\;\exists\,\delta(\varepsilon;\,\overline{x}_0)>0,\;\;\forall\overline{x}',\overline{x}''\;:\; 0<\rho(\overline{x}';\,\overline{x}_0)<\delta,\;\; 0<\rho(\overline{x}'';\,\overline{x}_0)<\delta \;\Rightarrow\; |f(\overline{x}')-f(\overline{x}'')|<\varepsilon.$$

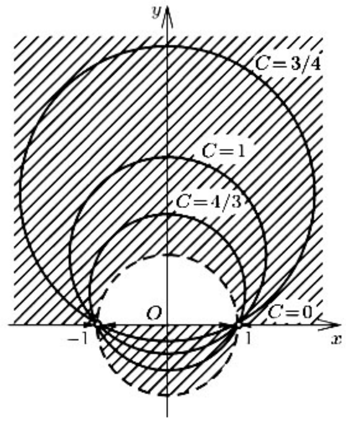
Теорема *(критерий Коши):* $\exists \lim\limits_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(\overline{x}) \;\Leftrightarrow\; f(\overline{x})$ удовлетворяет в точке $\overline{x}_0$ условию Коши.

Определение *Линией уровня c ($c \in \mathbb{R}$) функции $f(x;\, y)$* называется множество точек $(x;\, y) \in \mathbb{R}^2$ таких, что $f(x;\, y) = c$.

Определение *Поверхностью уровня c ($c \in \mathbb{R}$) функции $f(x;\, y;\, z)$* называется множество точек $(x;\, y;\, z) \in \mathbb{R}^3$ таких, что $f(x;\, y;\, z) = c$.

39.1. *(3166,3168)*

Найдите c—уровни следующих функций:



(а) $u = x + y + z$;

(б) $u = x^2 + y^2 - z^2$;

(в) • $u = \sqrt{\dfrac{2y}{x^2 + y^2 - 1}}$.

39.2. *(3179,3180)*

(а) Пусть $z = x + y + f(x - y)$. Найдите функции $z(x;\, y)$ и $f(x)$, если $z = x^2$ при $y = 0$;

(б) Найдите функцию $f(x; y)$, если $f\left(x + y;\, \dfrac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$.

39.3. Постройте (если это возможно) пример функции $f(x; y)$ с `несуществующим` в точке (0; 0) двойным пределом, для которой в этой точке:

(а) существуют оба повторных предела, и они равны;

(б) существуют оба повторных предела, и они не равны;

(в) • существует только один повторный предел;

(г) не существует оба повторных предела.

39.4. Постройте (если это возможно) пример функции $f(x; y)$ с `существующим` в точке (0; 0) двойным пределом, для которой в этой точке выполнены условия из предыдущего номера.

<u>**Замечание:**</u> Для примеров **желательно** не брать функции из последующих номеров.

39.5. $\star$ Постройте пример функции, у которой нигде не существует двойного предела, но всюду существуют оба повторных равных предела.

39.6. *(3183)*

(а) • Покажите, что для функции $f(x;\,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}, & x^2+y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$

имеем: $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x;y) = \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x;y) = 0$, тем не менее, $\nexists \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x;\,y)$.

(б) Покажите, что для функции $f(x;\,y) = (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\cdot\sin\dfrac{1}{y}$ оба повторных предела не существуют, тем не менее, существует двойной предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x;\,y)$ равный 0.

(в) Чему равен предел функции $f(x;\,y) = x^2\,e^{-(x^2-y)}$ вдоль любого луча

$$x = t\cos\alpha,\ \ y = t\sin\alpha \quad (0 \leqslant t < +\infty) \ \text{ при } \ t \to +\infty?$$

Можно ли эту функцию назвать бесконечно малой при $x \to +\infty,\ y \to +\infty$?

39.7. *(3185,3187,3188,3189,3190)*

Найдите следующие пределы:

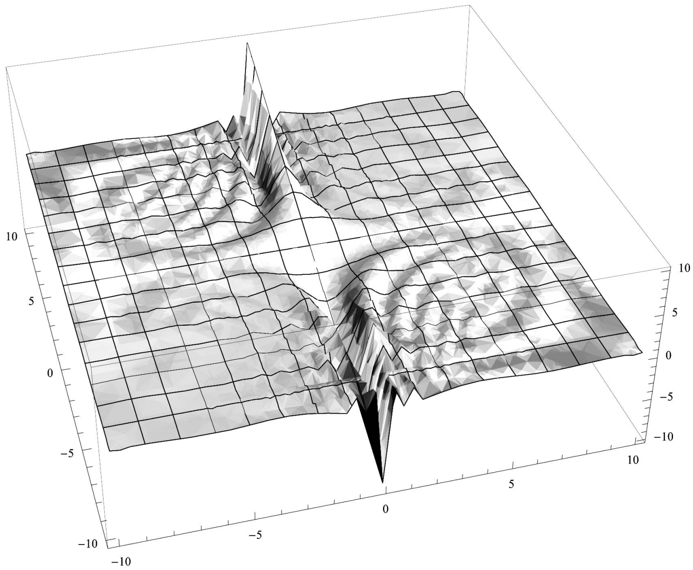
(а) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$;

(б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}} \dfrac{\sin xy}{x}$;

(в) • $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} (x^2+y^2)\,e^{-(x+y)}$;

(г) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$;

(д) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$.



$$f(x;y) = \frac{\sin xy}{x}$$

39.8. • Найдите предел функции $f(x;\,y) = \dfrac{x^2y}{y^2+x^4}$ в точке $(0;\,0)$ по прямой

$$x = \alpha t,\ \ y = \beta t,\ \ \alpha^2+\beta^2 \neq 0.$$

Докажите, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x;y)$ не существует.

39.9. *(достаточное условие существования двойного предела)* •

Пусть функция $f(x;\,y)$ определена в проколотой окрестности точки $(x_0;\,y_0)$, и $\exists\rho_0 > 0$, что при всех φ и при всех $\rho \in (0;\,\rho_0)$ выполнено:

$$\big|f(x_0+\rho\cos\varphi,\ y_0+\rho\sin\varphi) - b\big| \leqslant F(\rho),$$

где $\lim\limits_{\rho\to 0+0} F(\rho) = 0$. Докажите, что $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y) = b$.

Замечание: ***Грубо ошибочным*** является рассуждение: $\lim\limits_{\rho\to 0+0} f(\rho\cos\varphi;\ \rho\sin\varphi) = b$, следовательно и $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x;y) = b$! Действительно, перейдя к полярным координатам в №39.8, получаем:

$$f(\rho\cos\varphi;\ \rho\sin\varphi) = \frac{\rho\, cos^2\varphi\sin\varphi}{\rho^2\ \cos^4\varphi + \sin^2\varphi}.$$

Что тождественно равно 0, если $\sin\varphi = 0$, и стремится к 0 при $\rho\to 0+0$, если $\sin\varphi\neq 0$. Но, как может быть показано, данный двойной предел не существует!

39.10. Перейдя к полярным координатам, и делая соответствующие оценки, найдите пределы:

(а) • $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^5}{x^4+y^4}$; *(б)* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x^2y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$; *(в)* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt[3]{x^3+y^4}-x}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

39.11. *(3196,3198)*

Найдите точки разрыва следующих функций:

(а) $u = \dfrac{x+y}{x^3+y^3}$; *(б)* $u = \dfrac{1}{\sin x\ \sin y}$.

39.12. Исследуйте на непрерывность следующие функции:

(а) $f(x;\ y) = \begin{cases} x\cdot\sin\dfrac{1}{y}, & y\neq 0;\\ 0, & y = 0;\end{cases}$ *(б)* • $f(x;\ y) = \begin{cases} x\,\dfrac{\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y}{x-y}, & x\neq y;\\ 0, & x = y;\end{cases}$

(в) $f(x;\ y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 1, & x^2+y^2 = 0;\end{cases}$ *(г)* $f(x;\ y) = \begin{cases} x\,y, & x\in\mathbb{Q},\ y\in\mathbb{Q};\\ 0, & x\notin\mathbb{Q} \text{ или } y\notin\mathbb{Q};\end{cases}$

39.13. $\star$ *(а)* Покажите, что для любой функции $f:\mathbb{Q}^2\mapsto\mathbb{R}$ найдётся функция $g:\mathbb{Q}\mapsto\mathbb{R}$ такая, что $f(x;y)\leqslant g(x)+g(y)$ для всех $x,y\in\mathbb{Q}$.

(б) Найдите функцию $f:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}$, для которой не существует такой функции $g:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$

39.14. $\star$ Пусть функция $f:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}$ удовлетворяет условию:

$$f(x;y)+f(y;z)+f(z;x) = 0 \quad \text{для } \forall x,y,z\in\mathbb{R}.$$

Докажите, что найдётся функция $g:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ такая, что $f(x;y) = g(x)-g(y)$ для $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

39.15. $\star$ Пусть $\sigma-$ пробегает множество перестановок натуральных чисел $\{1;2;\ldots;n\}$. Найдётся ли функция $f:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}$ такая, что все $n!$ пределов

$$\lim_{x_{\sigma(1)}\to 0}\lim_{x_{\sigma(2)}\to 0}\ldots\lim_{x_{\sigma(n)}\to 0} f(x_1;x_2;\ldots;x_n)$$

существуют и попарно различны?

Определение: *Частной производной по x функции $f(x;\,y)$ в точке $(x_0;\,y_0)$* называется производная функции одной переменной $f(x;\,y_0)$ в точке x_0. Аналогично вводится понятие частной производной по y функции $f(x;\,y)$. То есть:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0;\,y_0) \;=\; \frac{d}{dx}f(x;\,y_0)\Big|_{x=x_0} \;=\; \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x;\,y_0)-f(x_0;\,y_0)}{\Delta x};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0;\,y_0) \;=\; \frac{d}{dy}f(x_0;\,y)\Big|_{y=y_0} \;=\; \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0;\,y_0+\Delta y)-f(x_0;\,y_0)}{\Delta y};$$

В общем случае функции нескольких переменных, частную производную функции $f(x_1;\ldots;x_n)$ по переменной x_i в точке $(x_1^0;\ldots;x_n^0)$ можно определить так:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0;\ldots;x_n^0) \;=\; \frac{d}{dx_i}f(x_1^0;\ldots;x_{i-1}^0;\,x_i;\,x_{i+1}^0;\ldots;x_n^0)\Big|_{x_i=x_i^0}.$$

Определение: Функция $f(\overline{x})$ называется дифференцируемой в точке x_0, если

$$\Delta f(\overline{x}_0)=f(\overline{x}_0+\Delta\overline{x})-f(\overline{x}_0) \;=\; A_1\Delta x_1+\ldots A_n\Delta x_n+\overline{\text{o}}\big(\rho\big),$$

где $\rho=\sqrt{\Delta x_1^2+\ldots+\Delta x_n^2} \;\approxeq\; \alpha_1|x_1|+\ldots+\alpha_n|x_n|$.

Теорема: Если функция $f(\overline{x})$ дифференцируема в точке $\overline{x}_0$, то $A_i \;=\; \dfrac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_i}\Big|_{\overline{x}=\overline{x}^0}$, $i=\overline{1,n}$.
Если функция $f(\overline{x})$ имеет частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ непрерывные в точке $(\overline{x}_0)$, то она дифференцируема в этой точке.

Определение: $$\frac{\partial^k f(\overline{x})}{\partial x_{i_1}\ldots x_{i_k}} \;=\; \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\frac{\partial^{k-1}f(\overline{x})}{\partial x_{i_2}\ldots x_{i_k}}\right).$$

Определение: $df(\overline{x}) \;=\; \dfrac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\dfrac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$*—первый дифференциал функции многих переменных*;

$$d^nf(\overline{x}) \;=\; d\big(d^{n-1}f(\overline{x})\big);$$

$$d^nf(\overline{x})=\left(dx_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+dx_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^n f(\overline{x}) \quad \textit{(случай независимой переменной } \overline{x}\textit{)};$$

$$d^2f(x;y)=\left[dx^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2dxdy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+dy^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]f(x;y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2.$$

Теорема: Пусть функция $f(x;\,y)$ дважды дифференцируема в точке $(x_0;\,y_0)$. Тогда в этой точке частные производные $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ и $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ равны.

Замечание: Данная теорема утверждает, что в данной точке $(x_0;\, y_0)$ имеет место равенство $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, если в этой точке дифференцируемы $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Из дифференцируемости $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ в точке $(x_0;\, y_0)$ вытекает существование в этой точке *всех* частных производных второго порядка. Однако равенство $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ имеет место и при условии существования лишь производных $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, но при дополнительном требовании непрерывности этих производных в рассматриваемой точке.

Теорема (*формула конечных приращений Лагранжа*):

Если функция $f(\overline{x})$ дифференцируема на множестве $G \subset \mathbb{R}^n$, то для

$$\forall \overline{x},\ \overline{x} + \Delta\overline{x} \in G \quad \exists \theta \in (0;\, 1),\ \text{такое что выполняется тождество}$$

$$f\big(\overline{x} + \Delta\overline{x}\big) - f\big(\overline{x}\big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f\big(\overline{x} + \theta\, \Delta\overline{x}\big)}{\partial x_i} \Delta x_i.$$

40.1. Найдите частные производные указанного порядка от следующих функций:

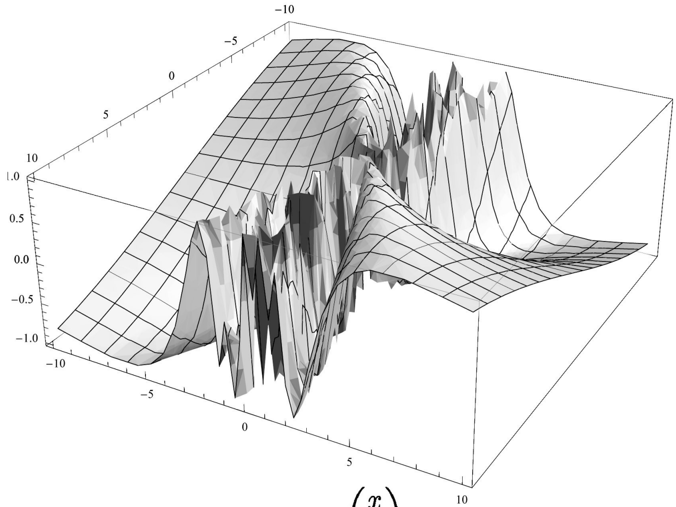
(а) $u = \sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$; $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}$; $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$;

(б) $u = \ln(1 + 2x + 3y)$; $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$;

(в) $u = e^{x^2+y^2+z^2}$; $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$; $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$;

(г) $u = x^y + y^x$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$;

(д) $u = \dfrac{1}{ax + by}$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.



$u = \sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$

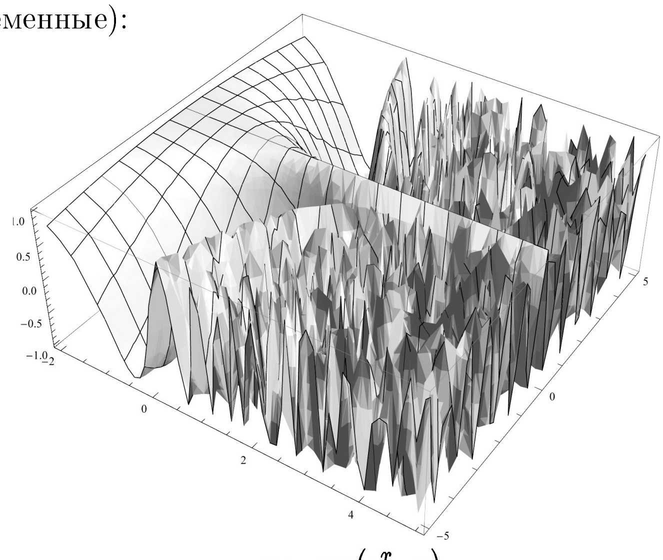
40.2. *(3237, 3241, 3239)* Найдите дифференциалы первого и второго порядков от следующих функций (x, y, z - независимые переменные):

(а) • $u = \sqrt{x^2 + y^2}$;

(б) $u = \dfrac{z}{x^2 + y^2}$;

(в) $u = e^{xy}$;

(г) $u = \cos(e^x \cdot y)$.



$u = \cos(e^x \cdot y)$

40.3. *(3212)*

(а) • Найдите $f'_x(0;0)$ и $f'_y(0;\,0)$, если $f(x;y)=\sqrt[3]{xy}$. Является ли эта функция дифференцируемой в точке $(0;0)$?

(б) Исследуйте на дифференцируемость в точке $(0;\,0)$ функцию

$$f(x;y)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & \text{при } x^2+y^2>0 \\ 0, & \text{при } x^2+y^2=0 \end{cases},$$

40.4. Приведите пример

(а) всюду дифференцируемой функции, имеющей разрывные (хотя бы в 1-ой точке) частные производные.

(б) • разрывной в точке $(0;\,0)$ функции $f(x;\,y)$, имеющей в этой точке обе частные производные.

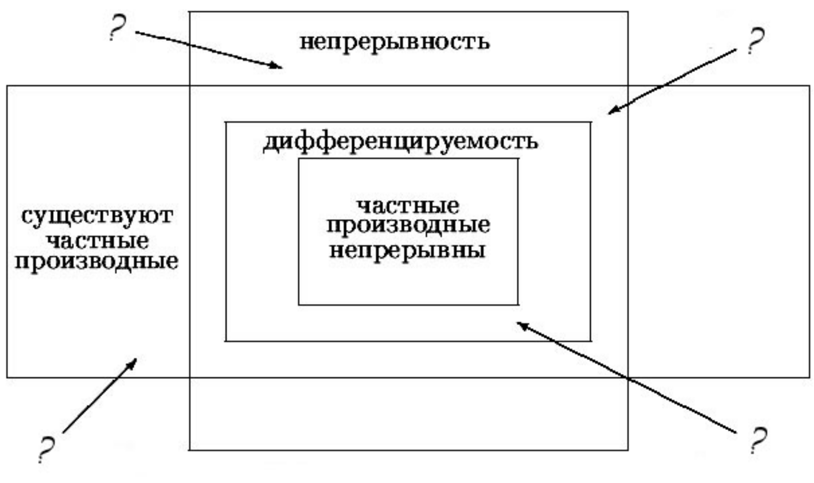
Замечание: Таким образом, функция, имеющая обе частные производные в точке, обязана быть непрерывной по каждой из переменных в этой точке, но не обязана быть непрерывной как функция двух переменных.

*(в)*непрерывной в точке $(0;0)$ функции, не имеющей в данной точке частной производной.

(г) непрерывной в точке $(0;\,0)$ функции $f(x;\,y)$, имеющей в этой точке частные производные по обеим переменным, но не являющейся в ней дифференцируемой.

(д) функции $f(x;\,y)$, дифференцируемой в точке $(0;\,0)$, частные производные которой $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ терпят разрыв в точке $(0;\,0)$.

По результатам проведённых исследований, заполните рисунок:



40.5. Исследуйте на дифференцируемость в точке (0; 0) функцию $f(x;y)$, если:

(а) $f(x;y) = \sqrt[3]{x^3+y^4}$; *(б)* • $f(x;y) = \sin\left(e^{x+y} + \sqrt[3]{x^3+y^3}\right)$;

(в) $f(x;y) = \cos\sqrt[3]{xy}$; *(г)* $f(x;y) = x\sqrt{1+y^{2/3}}$;

(д) $f(x;y) = |x|^\alpha \cdot |y|^\beta$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

40.6. • Найдите все точки дифференцируемости функции $f(x;y) = x|y| + y|x|$.

40.7. • *(3255)* Докажите, что если функция $f(x;\, y)$ непрерывна по x при каждом фиксированном значении y и имеет ограниченную частную производную $f'_y(x;\, y)$, то эта функция непрерывна по совокупности переменных x и y.

40.8. ⋆ Найдите все значения α и A, при которых функция

$$f(x;y) = \begin{cases} (x^2+2y^2)^\alpha \sin\left(\frac{\pi}{3} - x + y\right), & \text{при } x^2+y^2>0 \\ A, & \text{при } x^2+y^2=0, \end{cases},$$

дифференцируема в точке (0; 0), и при этих α и A найти дифференциал $df(0;\, 0)$.

40.9. ⋆ Приведите пример функции переменных x и y, дважды непрерывно дифференцируемой по каждой переменной в области $U = \left\{(x;\, y)\,|\, x^2+y^2<1\right\}$ и не имеющей смешанной производной в точке (0; 0).

40.10. ⋆ Предположим, что функция $h: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ имеет непрерывные частные производные по обоим переменным и удовлетворяет уравнению:

$$h(x;y) = a\frac{\partial h(x;y)}{\partial x} + b\frac{\partial h(x;y)}{\partial y}$$

для некоторых констант a и b. И пусть $\exists M > 0$ такая, что $|h(x;y)| \leqslant M$ для $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$. Докажите, что $h(x;y) \equiv 0$.

40.11. ⋆ Докажите, что если непрерывно дифференцируемая на всей плоскости Oxy функция $f(x;y)$ удовлетворяет дифференциальному тождеству:

$$\frac{\partial f(x;y)}{\partial x} + f(x;y)\cdot\frac{\partial f(x;y)}{\partial y} = 0,$$

то функция $f(x;y)$ есть константа.

Пусть функция $F = F(\varphi;\, \psi)$ - дифференцируема и $\varphi = \varphi(x;y)$, $\psi = \psi(x;y)$, где φ, ψ дифференцируемы. Тогда производные сложной функции $F\big(\varphi(x;y);\, \psi(x;y)\big)$ вычисляются по следующим формулам:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \psi}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial x};$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \psi}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

Для вычисления производных второго порядка функции $F(x;\, y)$ полезно пользоваться *символическими формулами:*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \psi}\right)^2 F + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial \psi};$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \psi}\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \psi}\right) F + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\frac{\partial F}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}\frac{\partial F}{\partial \psi};$$

Инвариантность формы записи первого дифференциала:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \varphi}d\varphi + \frac{\partial F}{\partial \psi}d\psi = \frac{\partial F}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial F}{\partial \psi}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)dy = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy;$$

Если x, $y-$ независимые переменные, и функция $F(x;\, y)$ имеет непрерывные частные производные до n-го порядка включительно, то для *дифференциалов высших порядков* имеет место *символическая формула:*

$$d^n F(x;\, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n F(x;y).$$

<u>**Замечание:**</u> В данном листочке все параметры считаются натуральными.

41.1. *(3257, 3260, 3262, 3263)*

Найдите указанные частные производные:

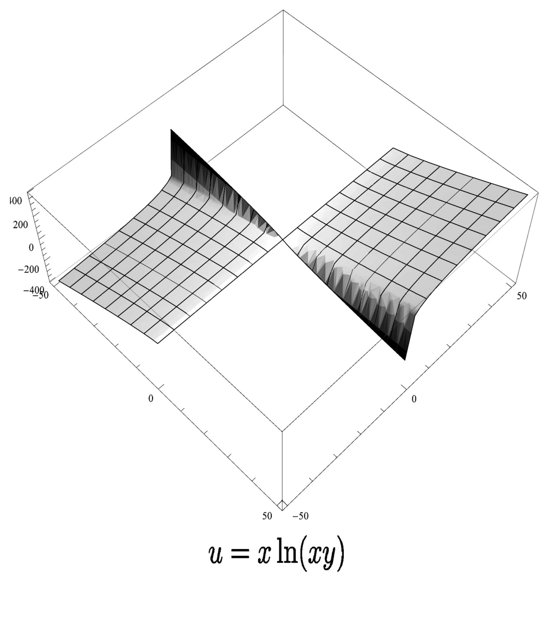
(а) $u = x^{y^z}$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}$;

(б) • $u = x\ln(xy)$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$;

(в) $u = e^{xyz}$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$;

(г) $u = (x-x_0)^p(y-y_0)^q$, $\dfrac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q}$;

(д) $u = \dfrac{x+y}{x-y}$, $\dfrac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$.



$u = x\ln(xy)$

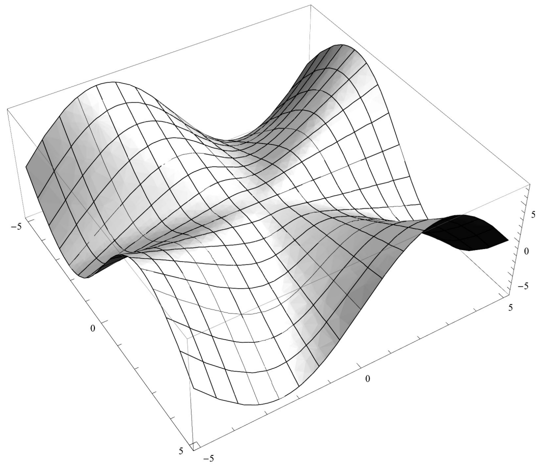
41.2. *(3269, 3270, 3273)*

Найдите полные дифференциалы указанного порядка:

(а) d^3u, если $u = x^3 + y^3 - 3xy(x - y)$;

(б) d^3u, если $u = \sin(x^2 + y^2)$;

(в) • d^3u, если $u = xyz$.

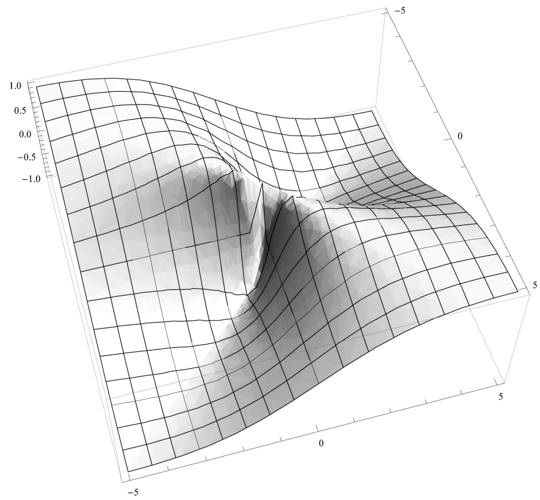


41.3. *(3230)*

(а) • Пусть

$$f(x;y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{при } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{при } x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Покажите, что $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0;0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0;0)$.



(б) Пусть

$$f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{при } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{при } x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Существует ли $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0;0)$?

41.4. *(3283, 3284, 3285)*

(а) Пусть $u = f(\varphi)$ - дважды дифференцируемая в $\mathbb{R}^3$ функция, $\varphi = x^2 + y^2 + z^2$. Найдите её производные первого и второго порядков, если все производные первого и второго порядков функции u по переменной φ известны;

(б) • Пусть $u = f(\varphi; \psi)$ - дважды дифференцируемая в $\mathbb{R}^2$ функция, $\varphi = x, \psi = \dfrac{x}{y}$. Найдите ее производные первого и второго порядков, если все производные первого и второго порядков функции u по переменным φ и ψ известны;

(в) Пусть $u = f(\varphi; \psi; \theta)$ - дважды дифференцируемая в $\mathbb{R}^3$ функция, $\varphi = x$, $\psi = xy$, $\theta = xyz$. Найдите ее производные первого и второго порядков, если все производные первого и второго порядков функции u по переменным φ, ψ и θ известны;

В случае, когда аргументы $x_1, x_2, \ldots, x_m$ функции $u = u(x_1; x_2; \ldots; x_m)$ являются два раза дифференцируемыми функциями некоторых независимых переменных $t_1, t_2, \ldots, t_k$, *полный дифференциал второго порядка* имеет вид:

$$d^2u = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}\, dx_i dx_k + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_k} d^2 x_k.$$

Или (с использованием *символической формулы*):

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right)^2 u + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}d^2x_1 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}d^2x_m\right).$$

41.5. *(3297,3298,3301)*

Найдите полные дифференциалы первого и второго порядков от следующих сложных функций (x, y и z - независимые переменные):

(а) • $u = f(\xi; \eta)$, где $\xi = x + y + z,\ \ \eta = x^2 + y^2 + z^2;$

(б) $u = f(\xi; \eta)$, где $\xi = \dfrac{x}{y},\ \ \eta = \dfrac{y}{z};$

(в) $u = f(\xi; \eta; \theta)$, где $\xi = x^2 + y^2,\ \eta = x^2 - y^2,\ \theta = 2xy.$

41.6. *(3277)*

Найдите полный дифференциал порядка n функции $u = f(\varphi)$, где $\varphi = x + y + z$.

41.7. *(3305)* Пусть $u = u(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и u– дважды дифференцируемая функция. Покажите, что

$$\Delta u = F(r), \ \text{ где } \ \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \ - \textit{ оператор Лапласа},$$

и найдите функцию $F(r)$.

41.8. $\star$ Пусть $f : [0;1]^2 \mapsto \mathbb{R}$– непрерывная функция, у которой существуют непрерывные на $(0;1)^2$ частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Пусть

$$a = \int\limits_0^1 f(0;y)dy, \quad b = \int\limits_0^1 f(1;y)dy, \quad c = \int\limits_0^1 f(x;0)dx,, \quad d = \int\limits_0^1 f(x;1)dx,$$

Верно ли, что в квадрате $(0;1)^2$ найдётся точка $x_0; y_0$ такая, что

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0) = b - a \ \text{ и } \ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0) = d - c.$$

Замена переменных в дифференциальных выражениях.

41.9. Преобразуйте следующие дифференциальные тождества, принимая ξ и η за новые независимые переменные:

(а) $\bullet$ $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\xi = x + y, \eta = x - y;$

Замечание: В данной задаче требуется выразить частные производные от функции z по "старым" независимым переменным x и y через её частные производные по "новым" независимым переменным ξ и η.

(б) $x\,\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\,\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{z}$, $\xi = 2x - z^2$, $\eta = -\dfrac{y}{z}$;

(в) $(x+z)\,\dfrac{\partial z}{\partial x} + (y+z)\,\dfrac{\partial z}{\partial y} = x + y + z$, $\xi = x + z$, $\eta = y + z$;

(г) $(1+x^2)\,\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (1+y^2)\,\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, $\xi = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, $\eta = \ln(y + \sqrt{1+y^2})$;

(д) $2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 5\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\xi = \dfrac{x-y}{3}$, $\eta = \dfrac{2x+y}{3}$;

(е) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 4\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 5\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial z}{\partial x} + 2\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, $\xi = 2x - y$, $\eta = x$.

41.10. *(переход к полярной системе координат)*

Преобразуйте к полярным координатам r и φ, полагая $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ следующие выражения:

(а) $\bullet$ $\omega = x\,\dfrac{\partial u}{\partial y} - y\,\dfrac{\partial u}{\partial x}$;

(б) $\omega = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, *(оператор Лапласа)*;

(в) $\omega = x^2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$;

(г) $\omega = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$.

Замечание: если мы пишем,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

то считаем u функцией от r и φ, $r = r(x;\,y)$, $\varphi = \varphi(x;\,y)$. В случае, когда написано

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi},$$

нами считается, что u функция от x и y, а $x = x(r;\,\varphi)$, $y = y(r;\,\varphi)$.

Если функция $f(\overline{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет в некоторой окрестности точки $\overline{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ непрерывные частные производные по всем переменным до $m+1$ порядка включительно, то в этой окрестности справедлива формула:

$$f(\overline{x}) = f(\overline{x}^0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} \left[(x_1 - x_1^0)\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + (x_n - x_n^0)\frac{\partial}{\partial x_n} \right]^k f(\overline{x}^0) + R_m(\overline{x}^0),$$

в которой

$$R_m(\overline{x}_0) = \frac{1}{(m+1)!} \left[(x_1 - x_1^0)\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + (x_n - x_n^0)\frac{\partial}{\partial x_n} \right]^{m+1} f\left[x_1^0 + \theta_m(x_1 - x_1^0); \ldots; x_n^0 + \theta_m(x_n - x_n^0) \right],$$

где $0 < \theta_m < 1$ - *остаточный член в форме Лагранжа.*

Для функции двух переменных формула Тейлора может быть записана как:

$$f(x;\, y) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{\partial^k f(x_0; y_0)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} (x - x_0)^{k-i} (y - y_0)^i + \overline{\mathrm{o}}\big(\rho^m\big) -$$

остаточный член в форме Пеано.

42.1. *(3581,3582)* Разложите функцию $f(x; y)$ по формуле Тейлора в окрестностях точки A.

(а) • $f(x;\, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5, \quad A(1;\, -2);$

(б) $f(x;\, y;\, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz, \quad A(1;\, 1;\, 1);$

(в) $f(x;\, y) = 2x^3 + x^2 y - 4y^2 + 5xy - 7x, \quad A(2;\, 2).$

42.2. *(3585, 3589)*

(а) В разложении функции $f(x;\, y) = x^y$ в окрестности точки $A(1; 1)$ выпишите члены до второго порядка включительно.

(б) • Функцию $F(x;\, y) = \dfrac{1}{4}\left[f(x+h; y) + f(x; y+h) + f(x-h; y) + f(x; y-h) \right] - f(x; y)$ разложите по степеням h с точностью до h^4.

42.3. *(3587)* Выведите приближённые формулы с точностью до членов второго порядка для выражений:

(а) $f(x;\, y) = \dfrac{\cos x}{\cos y}$;

(б) $f(x;\, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{1+x+y}{1-x+y}$.

42.4. *(3601)* Напишите три члена разложения в ряд Маклорена функций:

(а) • $f(x;\, y) = \displaystyle\int\limits_0^1 (1+x)^{t^2 y}\, dt$;

(б) $f(x;\, y) = (1+x)^m (1+y)^n, \quad m, n \in \mathbb{R}$.

42.5. Разложите функцию $f(x; y)$ по формуле Маклорена до членов указанного порядка малости, если:

(а) $f(x;\, y) = \ln(1+x^2)\ln(1+y^2), \quad n = 6$;

(б) • $f(x;\, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{x^2+y^2}{1+xy}, \quad n = 6$;

(в) • $f(x;\, y) = \sin x \cdot \operatorname{sh} 2y, \quad n = 5$;

(г) $f(x;\, y) = \sqrt[3]{\cos(x^3+y^2)}, \quad n = 6$;

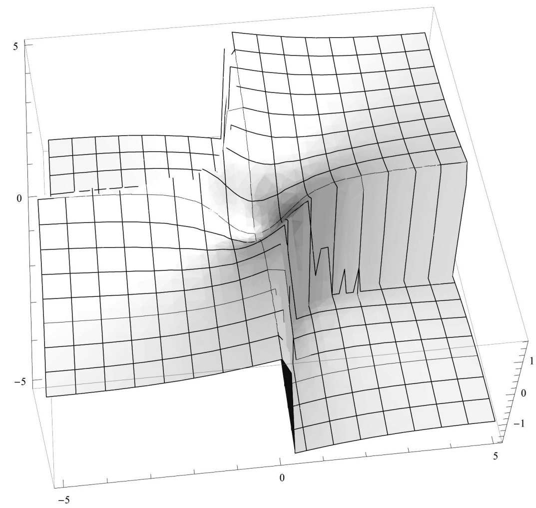
(д) $f(x;\, y) = e^{x^2+y^2} \cdot \operatorname{arctg}(x^2-y^2), \quad n = 6$;

(е) $f(x;\, y) = \dfrac{1}{(1-x)(1-y)}, \quad n = 4$;

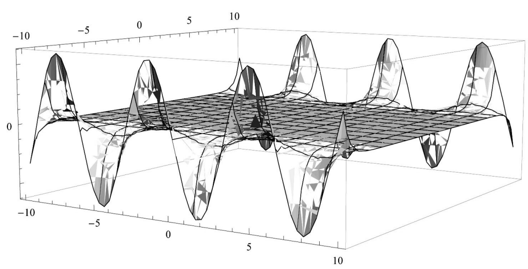
(ж) $f(x;\, y) = \operatorname{arctg}(xy + x^2 - y^3), \quad n = 6$;

(з) $f(x;\, y) = \operatorname{arctg}\, (x^2 y - 2e^{x-1}), \quad n = 4$;

(и) $f(x;\, y) = \cos\left(3 \arcsin x + y^2 - 2xy\right), \quad n = 4$.



$f(x;\, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{x^2+y^2}{1+xy}$



$f(x;\, y) = \sin x \cdot \operatorname{sh} 2y$

42.6. *(3594)* Разложите в ряд Маклорена следующие функции:

(а) $f(x;\, y) = \ln(1 + x + y)$;

(б) • $f(x;\, y) = \cos^2\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$;

(в) $f(x;\, y) = e^x \cos y$.

42.7. *(3603)* Напишите разложение в *ряд Тейлора* функции $f(x;\, y) = \dfrac{x}{y}$ в окрестности точки $M(1;\, 1)$.

42.8. Найдите предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x;\, y)$, используя формулу Тейлора:

(а) • $f(x;\, y) = \dfrac{x\sin y - y\sin x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $x^2+y^2>0$;

(б) • $f(x;\, y) = \dfrac{\ln(1+x^3+y^3)}{x^2+y^2}$;

(в) $f(x;\, y) = \dfrac{\mathrm{sh}x\cdot\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right) - \sin y\cdot\arcsin x}{(x^2+y^2)^{5/2}}$.

42.9. Используйте формулу Тейлора для доказательства не существования двойного предела $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x;\, y)$, если:

(а) • $f(x;\, y) = \dfrac{x\sin y - y\sin x}{(x^2+y^2)^2}$;

(б) $f(x;\, y) = \dfrac{1-\cos(x^3+y^3)}{x^6+y^6}$.

42.10. ⋆ Пусть функция $f(x;y)$ непрерывна вместе со своими частными производными до порядка m включительно в окрестности точки $(x_0;y_0)$, и пусть $P_m(x;y)$– её многочлен Тейлора в этой точке.

Докажите, что если $Q(x;y)$– какой-либо многочлен степени не выше m такой, что

$$f(x;y) = Q(x;y) + \overline{\mathrm{o}}\big(\rho^k\big), \quad k \geqslant m,\ \rho = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \to 0,$$

то $Q(x;y) = P_m(x;y)$.

42.11. $\star$ Пусть $Q-$ линейное отображение из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ в $\mathbb{R}$. Известно, что если функция $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\;f(0) = 0$ и $f(x) \geqslant 0$ в некоторой окрестности нуля, то $Q(f) \geqslant 0$. Докажите, что найдутся числа $a_{ij}, b_i, c\;\; (i, j = \overline{1, n})$ такие, что для любой функции $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ выполнено тождество:

$$Q(f) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0) + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) + c\, f(0).$$

42.12. $\star$ Пусть $f(x;y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ и $\alpha > 0-$ иррациональное число. Докажите, что если $f(x;x^\alpha) = \overline{\mathrm{o}}\big(x^n\big)$, $\;x \to 0+0$ при любом $n \in \mathbb{N}$, то и $f(x;y) = \overline{\mathrm{o}}\big(|x|^n + |y|^n\big)$, $\;x, y \to 0+0$ при любом $n \in \mathbb{N}$.

Введём обозначение: $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Определение: Будем говорить, что *функция* $f(\overline{x})$ *равномерно непрерывна на множестве* $\boldsymbol{X}$, если для неё выполнено:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon) > 0 \, : \, \forall \overline{x}', \, \overline{x}'' \in \mathbf{X}, \;\; \rho(\overline{x}', \, \overline{x}'') < \delta \;\Rightarrow\; |f(\overline{x}') \,-\, f(\overline{x}'')| \,<\, \varepsilon.$$

Теорема (*Кантора*): Если функция $f(\overline{x})$ непрерывна в замкнутой ограниченной области $\mathbf{D}$, то она равномерно непрерывна в этой области.

Определение: Будем говорить, что *функция* $f(x;\, y)$ *удовлетворяет условию Липшица по переменной* y *в области* $\boldsymbol{G}$, если

$$\exists\, L > 0 \, : \, \forall (x;\, y'), \; (x;\, y'') \in G \;\Rightarrow\; |f(x;\, y') \,-\, f(x;\, y'')| \,\leqslant\, L \cdot |y' - y''|.$$

43.1. Постройте пример непрерывной функции двух переменных,

(а) • определённой в неограниченной области и не равномерно непрерывной;

(б) • определённой в незамкнутой области и не равномерно непрерывной;

(в) равномерно непрерывной на множестве $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, но не равномерно непрерывной на всей плоскости.

43.2. *(3205,3206)* Докажите следующие предложения:

(а) пусть функция $f(x;\, y)$ непрерывна в области $\mathbf{D} \,=\, \left\{(x;\, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \geqslant a^2\right\}$ и существует $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} f(x;\, y) \,=\, b < \infty$. Тогда функция $f(x;\, y)$ равномерно непрерывна в указанной области;

(б) • пусть функция $f(x; y)$ дифференцируема на $\mathbf{D} = \left\{(x; y) \,\in\, \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 \,+\, y^2 \,\geqslant\, a^2\right\}$ и имеет в $\mathbf{D}$ ограниченные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Тогда функция $f(x;\, y)$ равномерно непрерывна в указанной области;

Замечание: В качестве $\mathbf{D}$ можно выбрать любое выпуклое множество.

(в) функция $f(\overline{x})$ равномерно непрерывна на множестве $\mathbf{G}$ тогда и только тогда, когда

$$\omega(\delta,\, f,\, \mathbf{G}) \;=\; \lim_{\delta\to 0+0} \sup_{\substack{\rho(\overline{x}',\overline{x}'')<\delta \\ \overline{x}',\overline{x}''\in G}} |f(\overline{x}') \;-\; f(\overline{x}'')| \;=\; 0.$$

(г) пусть в некоторой области $\mathbf{G}$ функция $f(x;\, y)$ непрерывна по переменной x, и равномерно относительно x непрерывна по переменной y. Тогда эта функция непрерывна в рассматриваемой области;

(д) пусть в некоторой области $\mathbf{G}$ функция $f(x;\, y)$ непрерывна по переменной x и удовлетворяет *условию Липшица* по переменной y. Тогда эта функция непрерывна в данной области;

43.3. *(3203)* Исследуйте на равномерную непрерывность функцию $f(x;\, y)$ на множестве $\mathbf{X}$:

(а) • $f(x;\, y) \;=\; \sqrt[3]{x^3+y^3}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{\sqrt{x^4+y^4}}, \quad \mathbf{X} \;=\; \bigl\{(x;\, y)\in\mathbb{R}^2 \bigm| x^2+y^2\geqslant 1\bigr\};$

(б) $f(x;\, y) \;=\; \sqrt[3]{xy}\,\ln(x^2+y^2), \quad \mathbf{X} \;=\; \bigl\{(x;\, y)\in\mathbb{R}^2 \bigm| 0<x^2+y^2<1\bigr\};$

(в) $f(x;\, y) \;=\; 2x-3y+5, \quad \mathbf{X} \;=\; \mathbb{R}^2;$

(г) • $f(x;\, y) \;=\; \sqrt{x^2+y^2}, \quad \mathbf{X} \;=\; \mathbb{R}^2;$

- проведите исследование, используя результаты №2;
- проведите исследование, используя только определение равномерной непрерывности.

<u>**Замечание:**</u> данные примеры показывают, что условие из №43.2а является лишь достаточным для равномерной непрерывности функции двух переменных.

(д) $f(x;\, y) \;=\; \sin\dfrac{\pi}{1-x^2-y^2}, \quad \mathbf{X} \;=\; \bigl\{(x;\, y)\in\mathbb{R}^2 \bigm| x^2+y^2<1\bigr\};$

(е) $f(x;\, y) \;=\; \arcsin\dfrac{x}{y}, \quad \mathbf{X} \;=\; \bigl\{(x;\, y)\in\mathbb{R}^2 \bigm| |x|\leqslant|y|,\, y\neq 0\bigr\};$

(ж) • $f(x;\,y) \;=\; \dfrac{\ln\left(1+x^2+y^2\right)}{\sqrt[4]{x^4+y^4}}, \quad \mathbf{X} \;=\; \left\{(x;\,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0<x^2+y^2<1\right\};$

(з) $f(x;\,y) \;=\; \operatorname{arctg}\sqrt{x^2+y^4}\cdot\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, \quad \mathbf{X} \;=\; \left\{(x;\,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0<x^2+y^2<1\right\}.$

(и) $f(x;\,y) \;=\; \sqrt[3]{x^2y^2}\,\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, \quad \mathbf{X} \;=\; \left\{(x;\,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2\geqslant 1\right\}$

43.4. Исследуйте на равномерную непрерывность в зависимости от параметра λ функцию $f_\lambda(x;\,y)$ на множестве $\mathbf{X}$, если:

(а) $f_\lambda(x;\,y) \;=\; (x^2+y^2)^\lambda\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, \quad \mathbf{X} \;=\; \left\{(x;\,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0<x^2+y^2<1\right\};$

(б) $f_\lambda(x;\,y) \;=\; (x^2+y^2)^\lambda\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, \quad \mathbf{X} \;=\; \left\{(x;\,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2\geqslant 1\right\}.$

43.5. Найдите *модуль непрерывности* $\omega(\delta,\,f) \;=\; \sup\limits_{\rho(\overline{x}',\overline{x}'')<\delta}|f(x';\,y') \;-\; f(x'';\,y'')|$ и исследуйте на равномерную непрерывность функцию $f(x;\,y)$ на её области определения:

(а) • $f(x;\,y) \;=\; ax+by+c, \quad a,\,b\in\mathbb{R};$

(б) $f(x;\,y) \;=\; \sqrt{x^2+y^2};$

(в) $f(x;\,y) \;=\; \sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}};$

(г) $f(x;\,y) \;=\; \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

43.6. $\star$

(а) Пусть $f:(0;1]^2\mapsto(0;+\infty)$– функция, непрерывная по совокупности переменных. Верно ли, что обязательно найдётся непрерывная функция $g:(0;1]\mapsto(0;+\infty)$ такая, что

$$g(x)=\overline{\mathrm{o}}\big(f(x;y)\big), \quad x\to 0+0$$

при любом $y\in(0;1]$?

(б) Пусть $f:(0;1]^2\mapsto(0;+\infty)$– функция, непрерывная по x при любом фиксированном $y\in(0;1]$. Верно ли, что обязательно найдётся непрерывная функция $g:(0;1]\mapsto(0;+\infty)$ такая, что

$$g(x)=\overline{\mathrm{o}}\big(f(x;y)\big), \quad x\to 0+0$$

при любом $y\in(0;1]$?

43.7. $\star$ Докажите, что не существует взаимно однозначного непрерывного отображения отрезка $0 \leqslant x \leqslant 1$ на квадрат $0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1$, т.е., что *отрезок и квадрат не гомеоморфны.*

Дифференцирование неявной функции

Определение: Функция $y = y(x_1; \ldots; x_n)$ называется *неявной функцией, определяемой функциональным уравнением*

$$F(y;\, x_1; \ldots; x_n) \,=\, 0 \tag{1}$$

в области $\boldsymbol{G}$, если при подстановке её в данное уравнение оно обращается в области $\mathbf{G}$ в тождество:

$$F\big(y(x_1; \ldots; x_n),\, x_1; \ldots; x_n\big) \,\equiv\, 0$$

Введём следующие обозначения: $m = (y;\, x_1; \ldots; x_n)$, $m_0 = (y^0;\, x_1^0; \ldots; x_n^0)$, $\overline{x}_0 = (x_1^0; \ldots; x_n^0)$.

Теорема: *(о существовании и дифференцируемости неявной функции)*

Предположим, что выполнены следующие условия:

1. $\exists \Delta > 0$, что $F(m)$– дифференцируема в $\mathbf{U}_\Delta(m_0)$;
2. $F(m_0) = 0$;
3. $\dfrac{\partial F}{\partial y}(m_0) \neq 0$ и $\dfrac{\partial F}{\partial y}(m)$ непрерывна в точке m_0;

Тогда для $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ :\ \exists!\ f(\overline{x}) = f(x_1; \ldots; x_n)$ в $\mathbf{U}_\delta(\overline{x}_0)$, (т.е. $\forall \overline{x} : \rho(\overline{x}, \overline{x}_0) < \delta$), для которой справедливо:

$$\forall \overline{x} \in \mathbf{U}_\delta(\overline{x}_0)\ \Rightarrow\ F(f(\overline{x}),\, \overline{x}) \,=\, 0,\ \ \rho(f(\overline{x}),\, y^0) < \varepsilon.$$

При этом функция $f(\overline{x})$– дифференцируема в $\mathbf{U}_\delta(\overline{x}_0)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} \,=\, -\dfrac{F'_{x_i}}{F'_y},\ i = \overline{1, n}.$

44.1. Приведите пример уравнения $F(x;\, y) = 0$,

(а) • не определяющее функцию $y = f(x)$;

(б) определяющее две функции;

(в) определяющее n функций;

(г) определяющее несчётное множество функций;

44.2. *(3364)* Пусть дано уравнение $x^2+y^2=1$ **(1)** и пусть $y=y(x)$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ **(2)** – произвольная функция, удовлетворяющая уравнению **(1)**.

(а) сколько однозначных функций **(2)** удовлетворяют уравнению **(1)**?

(б) сколько однозначных **непрерывных** функций **(2)** удовлетворяют уравнению **(1)**?

(в) сколько функций из пункта **б)** удовлетворяет условиям: $y(0)=1$, $y(1)=0$?

44.3. *(3371,3372)*

Найдите производные $y'(x)$ и $y''(x)$, считая $y=y(x)$ функцией от x, определяемой уравнениями:

(а) • $x^2+2xy-y^2 = a^2$; *(б)* $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

44.4. Найдите $y''(0)$ функции $y(x)$, заданной неявно уравнением

(а) • $x^5+4y = x+y^5+3$ и удовлетворяющей условию $y(0)=1$;

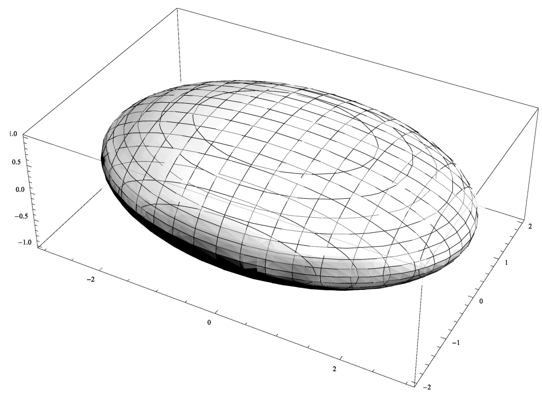
(б) $2y+xy^3+2e^x = 0$ и удовлетворяющей условию $y(0)=-1$.

44.5. *(3390,3392)*

Найдите первый и второй дифференциалы функции $z=z(x;\,y)$, если

(а) • $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$;

(б) $\dfrac{x}{z} = \ln\dfrac{z}{y} + 1$.



44.6. Найдите первый и второй дифференциалы в точке $A(x_0;\,y_0\,z_0)$ функции $z=z(x;\,y)$, заданной неявно уравнением:

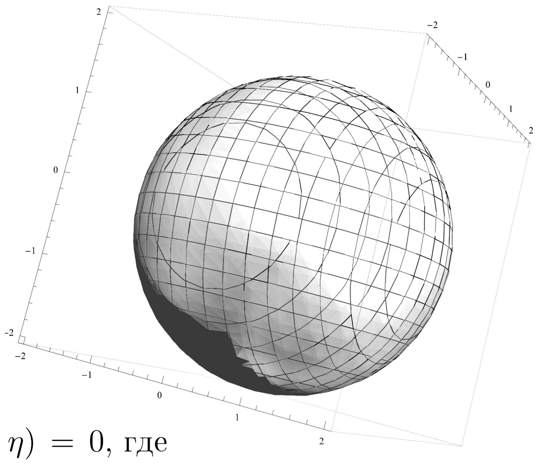
(а) $z^2-2xy = \ln z + y$, $A=(0;\,1;\,1)$;

(б) $\dfrac{\pi}{4} + z - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{2} - \operatorname{arctg} z = 0$, $A=(1;\,1;\,1)$;

44.7. *(3383,3385)*

Для функции $z = z(x;\, y)$ найдите частные производные первого и второго порядков, если:

(а) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;



(б) $x + y + z = e^z$;

(в) $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 8xz + z - 8$.

44.8. $\bullet$*(3395)*

Найдите смешанную производную $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если $F(\xi;\, \eta) = 0$, где

$$\xi = x + y + z, \ \ \eta = x^2 + y^2 + z^2, \ \ z = z(x;\, y).$$

44.9. *(3398)*

Для функции $z = z(x;\, y)$ найдите второй дифференциал d^2z, если $F(\xi;\, \eta) = 0$, где:

(а) $\xi = x + z, \ \ \eta = y + z$;

(б) $\xi = \dfrac{x}{z}, \ \ \eta = \dfrac{y}{z}$;

44.10. Пусть z определяется, как функция от x и y из уравнения $z = x + y\varphi(z)$. Предполагая, что $1 - y\varphi'(z) \neq 0$, установите, что эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению: $z'_y = \varphi(z) \cdot z'_x$

44.11. *(3401,3402)* Пусть $x = x(z), \ \ y = y(z)$. Найдите:

(а) $\dfrac{dx}{dz}$ и $\dfrac{dy}{dz}$, если $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1; \end{cases}$

(б) $\bullet$ $\dfrac{dx}{dz}, \dfrac{dy}{dz}, \dfrac{d^2x}{dz^2}, \dfrac{d^2y}{dz^2}$ при $x = 1, y = -1, z = 2$, если: $\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{z^2}{2}, \\ x + y + z = 2. \end{cases}$

44.12. $\bullet$*(3402)*

Пусть $u = u(x;\, y), \ \ v = v(x;\, y)$. Найдите $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$, если:

$$\begin{cases} xu - yv = 0, \\ yu + xv = 1. \end{cases}$$

44.13. Найдите в точке $(1;0;1;-2)$ частные производные функций $u = u(x;y)$, $v = v(x;y)$, заданных неявно системой уравнений

$$\begin{cases} xu + yv - u^3 = 0, \\ x + y + u + v = 0. \end{cases}$$

44.14. Пусть из уравнения

$$y = x\varphi(z) + \psi(z)$$

переменная z определяется как неявная функция от x и y. Предполагая $x\varphi'(z) + \psi'(z) \neq 0$, установите, что производные этой функции удовлетворяют следующему тождеству:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

44.15. *(3427)*

Пусть $\alpha = \alpha(x;\, y)$– переменный параметр. Покажите, что функция $z = z(x;\, y)$, заданная системой уравнений

$$\begin{cases} z = \alpha x + \dfrac{y}{\alpha} + f(\alpha), \\ 0 = x - \dfrac{y}{\alpha^2} + f'(\alpha), \end{cases}$$

удовлетворяет дифференциальному тождеству: $\dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = 1.$

44.16. Пусть

$$x_1 = x_1(x_2;\, x_3 \ldots; x_n), \;\; x_2 = x_2(x_1;\, x_3; \ldots; x_n), \ldots, x_n = x_n(x_1;\, x_2; \ldots; x_{n-1}) -$$

функции, определяемые уравнением $F(x_1;\, x_2; \ldots; x_n) = 0$. Вычислите произведение:

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial x_3} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial x_n}{\partial x_1}.$$

44.17. $\star$ Докажите, что в некоторой окрестности $B(0,r)$ существует единственная непрерывно дифференцируемая функция f, удовлетворяющая условиям:

$$e^{2x\cos f(x)} + e^{f(x)\cos 2x} = 2, \quad x \in B(0;r);$$

$$f(0) = 0.$$

Вычислите $f'(0)$.

Производная по направлению. Градиент

Пусть $\overline{m}_0 = (x_0;\ y_0 :\ z_0)$, $f(\overline{m}) = f(x;\ y;\ z)$, $\overline{e} = \big(\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma\big)$, $\|\overline{e}\| = 1$, где $\overline{e}$– *направляющий вектор*; α, β, γ– углы между осями Ox, Oy и Oz соответственно, и вектором $\overline{e}$.

Рассмотрим далее функцию $g(t) = f(\overline{m}_0 + t\overline{e}) = f(x_0 + t\cos\alpha; y_0 + t\cos\beta; z_0 + t\cos\gamma)$, где $t \in \mathbb{R}$.

Определение: *Производной функции $f(\overline{m})$ по направлению $\overline{e}$ в точке m_0* называется производная сложной функции $g(t)$ в точке $t_0 = 0$, т.е. число:

$$\frac{\partial f(\overline{m}_0)}{\partial \overline{e}} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\overline{m}_0 + t\overline{e}) - f(\overline{m}_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0).$$

Если функция $f(\overline{m})$ дифференцируема в точке $\overline{m}_0$, то производная по направлению $\overline{e}$ вычисляется по формуле:

$$\frac{\partial f(\overline{m}_0)}{\partial \overline{e}} = \frac{\partial f(\overline{m}_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(\overline{m}_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f(\overline{m}_0)}{\partial z}\cos\gamma.$$

Определение: Вектор *набла*, $\nabla f(\overline{m}_0) = \mathrm{grad} f(\overline{m}_0) = \big(f'_x(\overline{m}_0),\ f'_y(\overline{m}_0),\ f'_z(\overline{m}_0)\big)$ называется *градиентом функции $f(\overline{m})$ в точке $\overline{m}_0$*.

$$\text{Имеем:}\quad \frac{\partial f(\overline{m}_0)}{\partial \overline{e}} = \big(\mathrm{grad} f(\overline{m}_0),\ \overline{e}\big),\quad |\mathrm{grad} f| = \sqrt{\big(f'_x\big)^2 + \big(f'_y\big)^2 + \big(f'_z\big)^2}.$$

Утверждение: Градиент функции (в данной точке) - это вектор, направление которого есть направление наибольшей скорости роста функции, а норма градиента равна наибольшей скорости роста.

Утверждение: *Тангенс угла наклона нормали к кривой $y(x)$ в точке* $(x_0; y_0)$ равен:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{1}{y'(x_0)}.$$

Замечание: Все параметры в этом листочке считаются положительными.

45.1. *(3341,3342,3344,3345)*

Найдите производную функции:

(а) • $z = x^2 + y^2$ в точке $M(1;\ 1)$ по направлению l, составляющем угол $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ с положительным направлением оси Ox;

(б) $u = xyz$ в точке $M(1;\ 1;\ 1)$ по направлению $l = \big(\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma\big)$. Чему равен $|\mathrm{grad} u|$ в этой точке?

(в) $z = x^2 - xy + y^2$ в точке $M(1;\,1)$ по направлению l, составляющем угол α с положительным направлением оси Ox. В каком направлении эта производная имеет: *наибольшее значение; наименьшее значение; равна нулю?*

(г) $z = 1 - \left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}\right)$ в точке $M\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}};\,\dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)$ по направлению внутренней нормали в этой точке к кривой: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

(д) $\bullet$ $u = xy + \dfrac{z}{y}$ в точке $M(2;\,1;\,2)$ по направлению градиента функции $g(x;y;z) = xyz$ в этой точке;

(е) $u = \operatorname{arctg}\dfrac{xz}{y} + \ln\,(x^2z^2 + y^2)$ в точке $M(1;\,1;\,-1)$ по направлению градиента функции $g(x;y;z) = xyz - (x^2 + y^2 + z^2)$ в этой точке.

45.2. *(3347)* $\bullet$

Определите угол между градиентами функции $u = x^2 + y^2 - z^2$ в точках $A(\varepsilon;\,0;\,0)$ и $B(0;\,\varepsilon;\,0)$.

45.3. *(3355,3357,3358)*

(а) Полагая $z = z(x;y)$, решите уравнение $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$;

(б) Полагая $z = z(x;y)$, решите уравнение $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 0$;

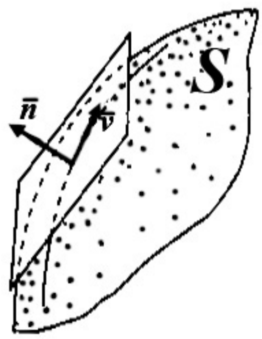
(в) Найдите решение $z = z(x;y)$ уравнения $\dfrac{\partial z}{\partial x} = x^2 + 2y$, удовлетворяющее условию $z(x;\,x^2) = 1$.

Пусть поверхность $\mathbf{S}$ задана в $\mathbb{R}^3$ непрерывной функцией $z = f(x;y)$, т.е.

$$\mathbf{S} = \Big\{\big(x;\,y;\,f(x;y)\big)\,\Big|\,(x;\,y) \in \mathbf{D}\Big\} \text{ и } m_0 = (x_0;\,y_0;\,z_0) \in \mathbf{S}$$

<u>Определение:</u> Плоскость $\mathbf{P}:\ A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, проходящая через точку m_0, называется *касательной плоскостью к* $\boldsymbol{S}$ *в точке* m_0, если $|f(x;y) - z| = \overline{o}\big(\rho\big)$ при $\rho \to 0$, где $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, точка $\big(x;\,y;\,f(x;y)\big) \in \mathbf{S}$ и точка $(x;\,y;\,z) \in \mathbf{P}$

<u>Определение:</u> Если поверхность $\mathbf{S}$ имеет в точке $m_0 \in \mathbf{S}$ касательную плоскость $\mathbf{P}$, то прямая, проходящая через точку m_0 перпендикулярно $\mathbf{P}$, называется *нормалью к* $\boldsymbol{S}$ *в точке* m_0.



Предположим, что функция $f(x;\,y)$, задающая поверхность $\mathbf{S}$ непрерывно дифференцируема в области $\mathbf{D}$, $\mathbf{D} \subset \mathbb{R}^2$. Тогда *касательная плоскость* к $\mathbf{S}$ существует в любой точке $m_0 = \big(x_0;\,y_0;\,f(x_0;y_0)\big)$ и имеет уравнение:

$$z - f(x_0;\,y_0) = f'_x(x_0;\,y_0)\cdot(x - x_0) + f'_y(x_0;\,y_0)\cdot(y - y_0). \qquad (1)$$

Уравнение нормали в точке $m_0 = \big(x_0;\, y_0;\, f(x_0; y_0)\big)$ имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0; y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0; y_0)} = \frac{z - f(x_0;\, y_0)}{-1}; \tag{2}$$

Если поверхность $\mathbf{S}$ задана неявно уравнением $F(x;\, y;\, z) = 0$, причём функция $F-$ непрерывно дифференцируема в области $\mathbf{G}$, $\mathbf{G} \subset \mathbb{R}^3$, $\overline{m}_0 = (x_0; y_0; z_0) \in \mathbf{G}$, $F(x_0; y_0; z_0) = 0$ и $(F'_x(\overline{m}_0))^2 + \big(F'_y(\overline{m}_0)\big)^2 + (F'_z(\overline{m}_0))^2 \neq 0$, то касательная плоскость к $\mathbf{S}$ в точке $\overline{m}_0$ существует и имеет уравнение:

$$F'_x(\overline{m}_0)\,(x - x_0) \,+\, F'_y(\overline{m}_0)\,(y - y_0) \,+\, F'_z(\overline{m}_0)\,(z - z_0) \,=\, 0. \tag{3}$$

Определение: Если кривая γ имеет в точке γ_0 касательную, то плоскость, проходящая через точку γ_0 перпендикулярно касательной, называется *нормальной плоскостью к кривой γ в точке γ_0*.

Если функции $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, определяющие кривую γ, дифференцируемы в точке $t_0 \in (\alpha;\, \beta)$ и $\big(x'(t_0)\big)^2 + \big(y'(t_0)\big)^2 + \big(z'(t_0)\big)^2 \neq 0$, то касательная к γ в точке $\gamma_0 = \big(x(t_0); y(t_0); z(t_0)\big)$ существует и задаётся уравнением:

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}. \tag{4}$$

Уравнение нормальной плоскости в этой точке имеет вид:

$$x'(t_0)\,(x - x_0) \,+\, y'(t_0)\,(y - y_0) \,+\, z'(t_0)\,(z - z_0) \,=\, 0. \tag{5}$$

45.4. *(3528,3529,3531)*

Напишите уравнение касательной прямой и нормальной плоскости в данных точках к следующим кривым:

(а) • $x = a\cos\alpha\cos t$, $y = a\sin\alpha\cos t$, $z = a\sin t$ в точке $t = t_0$;

(б) $x = a\sin^2 t$, $y = b\sin t\cos t$, $z = c\cos^2 t$ в точке $t = \dfrac{\pi}{4}$;

(в) • $x^2 + z^2 = 10$, $y^2 + z^2 = 10$ в точке $m_0 = (1; 1; 3)$;

(г) $x^2 + y^2 = 2ax$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$, в точке $m_0 = \left(\dfrac{3a}{2}; \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; a\right)$;

45.5. *(3539,3540)*

Напишите уравнения касательной плоскости и нормали в точке m_0 к следующим поверхностям:

(а) • $z = x^2 + y^2$, $m_0 = (1; 2; 5)$;

(б) $x^2 + y^2 + z^2 = 169$, $m_0 = (3; 4; 12)$;

(в) $2^{y/z} + 2^{z/x} \,=\, 6$, $m_0 = (1; 2; 2)$.

45.6. Найдите производную функции $u(x;y;z) = xyz$ в точке $(x_0;y_0;z_0)$, лежащей на *эллипсоиде* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, по направлению внутренней нормали к *эллипсоиду* в этой точке.

45.7. *(3533,3538)*

(а) • На кривой $x = t;\ y = t^2;\ z = t^3$ найдите точку, касательная в которой параллельна плоскости $x + 2y + z = 4$.

(б) Найдите производную функции $u = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ в точке $m_0 = (1;2;-2)$ в направление касательной в этой точке к кривой $x = t, y = 2t^2, z = -2t^4$.

45.8. •*(3555)*

Докажите, что нормали к поверхности вращения $z = f\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)$, $\quad (f' \neq 0)\quad$ пересекают ось вращения.

45.9. ⋆ Найдите производную функции

$$f(x_1;\, x_2;\ldots;x_n) \;=\; \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

в точке $(x_1^0;\, x_2^0;\ldots x_n^0)$ по направлению $\overline{e} = (1;\,1;\ldots 1)$.

45.10. ⋆ Пусть $F-$ поверхность в $\mathbb{R}^3$, заданная уравнением $z = f(x;y)$, $f-$ дважды непрерывно дифференцируемая в $\mathbb{R}^2$ функция. Докажите, что если в некоторой точке $(x_0;y_0)$ выполнено неравенство $f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2 > 0$, то найдётся окрестность точки $M_0\big(x_0;y_0;f(x_0;y_0)\big)$, в которой поверхность F и касательная плоскость P в точке M_0 имеют лишь одну общую точку.

45.11. ⋆ Поверхность $z = f(x;y)$, где $f(x;y)-$ многочлен степени не ниже второй, обладает свойством: *через любую её точку можно провести две прямые, целиком лежащие на поверхности.* Докажите, что поверхность - гиперболический параболоид.

45.12. ⋆ Пусть $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}-$ дифференцируемая функция такая, что $|\mathrm{grad} f(0;0)| = 1$ и $|gradf(u) - gradf(v)| \leqslant |u - v|$ для $\forall u, v \in \mathbb{R}^2$. Найдите все действительные $r > 0$ такие, что максимум функции f в круге $\{u \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, |u| \leqslant r\}$ достигается ровно в одной точке.

Определение: Точка $\overline{x}_0$, внутренняя для области определения функции $f(\overline{x})$ называется *точкой её локального экстремума*, если $\exists\delta > 0 : \forall\overline{x},\ 0 < \rho(\overline{x}_0;\overline{x}) < \delta$ приращение функции $\Delta f = f(\overline{x}) - f(\overline{x}_0) \neq 0$ и сохраняет свой знак.

В частности, если $\Delta f > 0$, то это *точка локального минимума*, а если $\Delta f < 0$, *локального максимума.*

Теорема (*необходимое условие существования локального экстремума*):
Если функция $f(\overline{x})$ дифференцируема в точке $\overline{x}_0$, и $\overline{x}_0$ – точка локального экстремума, тогда все частные производные в этой точке равны нулю, т.е. $\dfrac{\partial f(\overline{x}_0)}{\partial x_i} = 0,\ \ i = \overline{1,n}$.

Замечание: Если функция $f(\overline{x})$ не дифференцируема в точке $\overline{x}_0$, то она может иметь в данной точке локальный экстремум и $\nexists\,\dfrac{\partial f(\overline{x}_0)}{\partial x_i}$ для какого-либо i.

Определение: $\overline{x}_0$ называется *стационарной (критической) точкой для функции* $f(\overline{x})$, если она внутренняя для области определения функции $f(\overline{x})$ и $df(\overline{x}_0) = 0$, т.е. $\dfrac{\partial f(\overline{x}_0)}{\partial x_i} = 0,\ \ i = \overline{1,n}$.

Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$– независимые переменные или линейные функции, то $d^2 f(\overline{x}_0)$ представляет собой квадратичную форму следующего вида:

$$d^2 f(\overline{x}_0) \;=\; \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, dx_i\, dx_k, \quad \text{где}\ \ a_{ik} = a_{ki} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\Big|_{\overline{x}_0}.$$

Определение: Квадратичная форма относительно переменных $h_1, h_2, \ldots, h_n$ $\Phi(h_1,\ldots,h_n) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}\, h_i h_k$ называется *положительно определённой* (*отрицательно определённой*), если для любых $h_1,\ldots h_n$, таких что $|h_1| + \ldots + |h_n| \neq 0$, эта форма принимает строго положительные (строго отрицательные) значения.

Определение: Квадратичная форма называется *знакопеременной*, если она принимает как строго положительные, так и строго отрицательные значения.

Теорема (*достаточное условие существования локального экстремума*):
Пусть функция $f(\overline{x})$ дифференцируема в $\mathbf{U}_\delta(\overline{x}_0)$ и дважды дифференцируема в самой точке $\overline{x}_0$, и пусть $\overline{x}_0$– стационарная точка. Тогда, если:

- $d^2 f(\overline{x}_0)$– знакоопределённая квадратичная форма, то $\overline{x}_0$– точка локального экстремума. Причём, если $d^2 f(\overline{x}_0) > 0$, то x_0– точка локального минимума, если $d^2 f(\overline{x}_0) < 0$, то x_0– точка локального максимума.
- Если $d^2 f(\overline{x}_0)$– знакопеременная квадратичная форма, то локального экстремума в данной точке нет.
- Наконец, если $d^2 f(\overline{x}_0)$ может принимать нулевые значения на $\sum\limits_{i=1}^{n} |dx_i| \neq 0$, то ничего определённого сказать об экстремуме нельзя (*требуется дополнительный анализ*).

46.1. Постройте пример функции $f(x;\, y)$,

(а) для которой выполняется необходимое условие экстремума, но самого экстремума нет;

(б) имеющей строгий минимум (максимум), к которой неприменимо необходимое условие экстремума;

(в) $\bullet$ непрерывной только в точке своего строгого минимума, в которой выполняется необходимое условие экстремума;

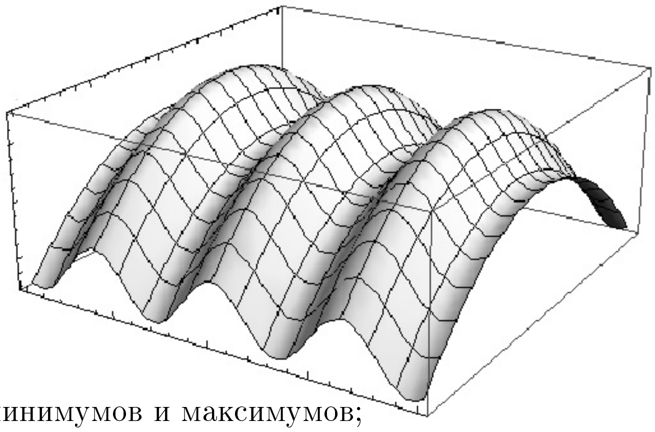
(г) имеющей строгий минимум, к которой неприменимы достаточные условия экстремума;

(д) не имеющей в (*седловой*) точке экстремума, к которой неприменимы достаточные условия экстремума.

46.2. Постройте пример функции $f(x;\, y)$,

(а) $\bullet$ отличной от константы, в любой точке плоскости, имеющей нестрогий экстремум;

(б) $\bullet$ непрерывно дифференцируемой на всей плоскости, имеющей ***бесконечно много*** строгих максимумов, но ***ни одного*** минимума;



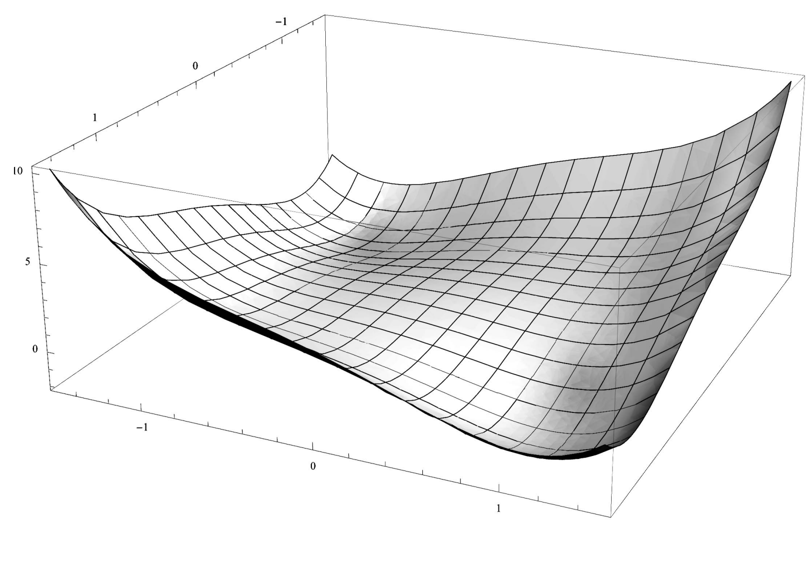
Замечание Обратим внимание читателя, что у непрерывной функции **одной** переменной локальные максимумы и минимумы *чередуются*. В случае функции **двух** переменных, как показывает последний пример это может быть не так.

(в) являющейся ограниченной, но не имеющей минимумов и максимумов;

Замечание В качестве данных примеров **желательно** не брать функции из нижеследующих номеров.

46.3. *(3621,3622,3623,3624,3627,3628,3631,3636,3639,3642,3643,3647)*

Исследуйте на экстремум следующие функции нескольких переменных:



(а) $\bullet$ $z = x^2 - (y-1)^2$;

(б) $z = x^2 + (y-1)^2$;

(в) $\bullet$ $z = (x - y + 1)^2$;

(г) $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$;

(д) $\bullet$ $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$;

(е) $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$;

(ж) • $z = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}, \qquad (x > 0,\ y > 0)$;

(з) • $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$;

(и) $z = \sin x + \cos y + \cos(x - y), \qquad \left(0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2},\ 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$;

(к) $z = xy \ln(x^2 + y^2)$;

(л) $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$;

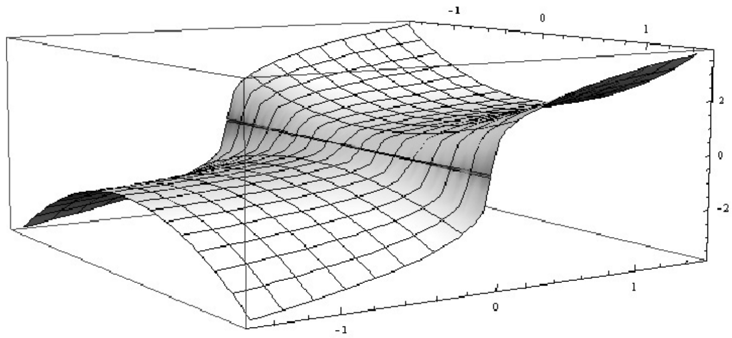
(м) $u = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$;

(н) • $u = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z), \qquad (0 \leqslant x \leqslant \pi,\ \ 0 \leqslant y \leqslant \pi;\ \ 0 \leqslant z \leqslant \pi)$.

46.4. Исследуйте на экстремум функции:

(а) • $z = (1 + x^2)\sqrt[3]{y}$;

(б) $z = \dfrac{xy}{1 + x^2 y^2}$.



46.5. Пусть $f(x; y) = (y - x^2)(y - 2x^2), \qquad (x;\ y) \in \mathbb{R}$.
Докажите, что:

1. $(0; 0)$ есть стационарная для f(x; y);
2. для $\forall \varphi \in (0;\ \pi)$ функция $g(t) = f(t\cos\varphi;\ t\sin\varphi)$, $\ t \in \mathbb{R}$ имеет строгий минимум в точке $t = 0$;
3. $(0; 0)$ не есть точка локального экстремума для функции $f(x; y)$.

46.6. Определите стационарные точки функции $u(x;\ y;\ z)$ и исследуйте их на экстремум, если:

(а) $u(x; y; z) = xy + yz, \quad (x; y; z) \in \mathbb{R}^3$;

(б) $u(x; y; z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 2yz + 2xz, \quad (x; y; z) \in \mathbb{R}^3$;

(в) $u(x; y; z) = (x + y + z)\, e^{-x-2y-3z}, \quad x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0$.

46.7. Исследуйте на экстремум функцию, заданную формулой: $f(x;y) = (x^2 - y^2)\, e^{-x^2-y^2}$.

46.8. $\star$ Определите стационарные точки и исследуйте на экстремум следующие функции:

(а) $f(x_1;\ldots;x_n) \;=\; \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \cdot e^{-(x_1^2+\ldots+x_n^2)}, \quad x_k \geqslant 0,\; 1 \leqslant k \leqslant n;$

(б) $f(x_1;\ldots;x_n) \;=\; \sum\limits_{i=1}^{N} a_i \sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - x_k^i)^2, \;\; (x_1;\ldots;x_n) \in \mathbb{R}^n,$

где $a_i > 0$, а числа $(x_1^i;\ldots;x_n^i) \in \mathbb{R}^n$– фиксированы.

46.9. $\star$ Пусть $a, b_1, \ldots, b_n$– действительные числа, $C = \{c_{ik}\}_{i,k=1}^{n}$– симметрическая невырожденная матрица и

$$f(x_1;\ldots;x_n) = a + \sum_{k=1}^{n} b_k x_k + \sum_{j,k=1}^{n} c_{jk} x_j x_k, \qquad \overline{x} = (x_1;\ldots;x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Проверьте, что вектор $\overline{x}^0 = -\dfrac{1}{2} C^{-1} \overline{b}$, где $\overline{b} = (b_1;\ldots;b_n)$ есть единственная критическая точка функции $f(\overline{x})$. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

1) $\overline{x}^0$– точка локального минимума (максимума);

2) $\overline{x}^0$– точка минимума (максимума) функции $f(\overline{x})$ на $\mathbb{R}^m$;

3) матрица C положительно (отрицательно) определена.

1) Экстремум неявно заданной функции.

Пусть функция $y = y(\overline{x})$ задана неявно уравнением: $F(\overline{x};\, y) = 0;$

$$0 = dF\Big|_{\overline{x}_0} = F'_{x_1}\Big|_{\overline{x}_0} dx_1 + \ldots + F'_{x_n}\Big|_{\overline{x}_0} dx_n + F'_y\Big|_{\overline{x}_0} dy \Longrightarrow \left\{F'_y\Big|_{\overline{x}_0} \neq 0\right\} \Longrightarrow dy = -\frac{1}{F'_y\big|_{\overline{x}_0}}\left(F'_{x_1}\Big|_{\overline{x}_0} dx_1 + \ldots + F'_{x_n}\Big|_{\overline{x}_0} dx_n\right).$$

Необходимое условие экстремума: $\begin{cases} dy = 0, \\ F(\overline{x}_0; y) = 0; \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1,n}; \\ F(\overline{x}_0; y) = 0; \end{cases}$

$$0 = d^2F\Big|_{\overline{x}_0} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n\right)^2 F + d\left(F'_y\right) dy + F'_y\, d^2y \Longrightarrow \{dy|_{\overline{x}_0} = 0\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow d^2y = -\frac{1}{F'_y} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j.$$

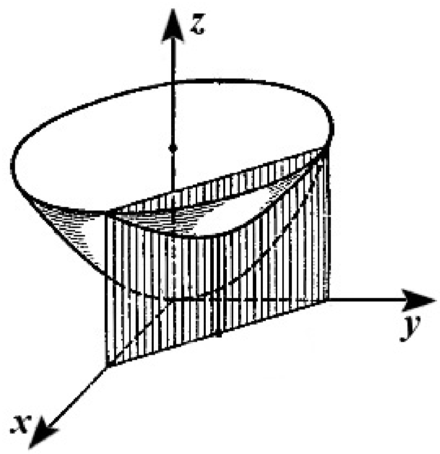
если $d^2y > 0$, $(d^2y < 0)$ то в точке $\overline{x}_0$ – локальный минимум (максимум).

2) Условный (относительный) экстремум.

Рассмотрим задачу нахождения экстремума функции $f(\overline{x}) = f(x_1; \ldots; x_n)$. И пусть, кроме того, на переменные $x_1, \ldots, x_n$ заданы m дополнительных условий: $\begin{cases} \varphi_1(\overline{x}) = 0, \\ \varphi_2(\overline{x}) = 0, \\ \ldots \quad \ldots \\ \varphi_m(\overline{x}) = 0, \end{cases}$ $\quad m < n \ (*)$

Определение: Условия $(*)$ называются *условиями связи* или *условиями ограничения.*

Определение: Точкой условного локального экстремума функции $f(\overline{x})$ при условиях связи $(*)$ называется точка $\overline{x}_0$ такая, что её координаты удовлетворяют условиям связи $(*)$, и существует окрестность данной точки, в пределах которой значение функции $f(\overline{x}_0)$ является наибольшим (наименьшим) среди её значений, удовлетворяющих условиям $(*)$.



Прямой метод нахождения точек условного экстремума (метод исключения).

Если уравнения связи $(*)$ удаётся разрешить относительно каких-то m переменных, например, относительно $x_1, \ldots, x_m$, т.е. $x_1 = g_1(x_{m+1}; \ldots; x_n), \ldots, x_m = g_m(x_{m+1}; \ldots; x_n)$, то исследование функции $f(\overline{x})$ на условный экстремум при ограничениях $(*)$ сводится к исследованию на безусловный экстремум функции $n - m$ переменных $x_{m+1}, \ldots x_n$:

$$u = f\big(g_1; \ldots g_m; x_{m+1} \ldots; x_n\big)$$

Метод Лагранжа ***нахождения точек условного экстремума.***
Пусть функции $f(\overline{x}) = f(x_1;\ldots;x_n)$, $\varphi_i(\overline{x})$, для всех $i=\overline{1,m}$ $(m<n)$ дифференцируемы в точке $\overline{x}_0$. И пусть ранг *матрицы Якоби (якобиана)*

$$\frac{D(\varphi_1;\ldots;\varphi_m)}{D(x_1;\ldots;x_m)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1(\overline{x}_0)}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial\varphi_1(\overline{x}_0)}{\partial x_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial\varphi_m(\overline{x}_0)}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial\varphi_m(\overline{x}_0)}{\partial x_m} \end{pmatrix} \text{ в точке } \overline{x}_0 \text{ равен } m.$$

Определение: Функцию

$$\mathcal{L}\big(\overline{x};\, \lambda_1;\ldots;\lambda_m\big) = f(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, \varphi_i(\overline{x})$$

называют *функцией Лагранжа.*

Определение: Параметры $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ называются *множителями Лагранжа.*

Теорема (*необходимое условие существования условного локального экстремума*):

Пусть $\overline{x}_0-$ точка локального экстремума функции $f(\overline{x})$ при условиях связи $\varphi_i(\overline{x})$ $i=\overline{1,m}$. Тогда $\overline{x}_0-$ стационарная точка функции Лагранжа, и в этой точке выполняются условия связи, т.е. при некоторых значениях $\lambda_1,\ldots\lambda_m$ координаты $\overline{x}_0$ удовлетворяют системе из $(m\,+\,n)$ неизвестных:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\mathcal{L}(\overline{x}_0)}{\partial x_k} \;=\; 0, & k=\overline{1,n} \\ \varphi_i(\overline{x}) \;=\; 0, & i=\overline{1,m}. \end{cases}$$

Теорема (*достаточное условие существования условного локального экстремума*):

Пусть функции $f(\overline{x})$, $\varphi_i(\overline{x})$, для всех $i=\overline{1,m}$ дважды непрерывно дифференцируемы в $\mathbf{U}_\delta(\overline{x}_0)$, для некоторого $\delta>0$. Кроме того, в точке $\overline{x}_0$ выполнены необходимые условия существования экстремума. Тогда, если:

- $d^2\mathcal{L}(\overline{x}_0)>0$ (положительно определённая квадратичная форма), то x_0- точка локального минимума,
- если $d^2\mathcal{L}(\overline{x}_0)<0$ (отрицательно определённая квадратичная форма), то x_0- точка локального максимума,
- если $d^2\mathcal{L}(\overline{x}_0)-$ знакопеременная квадратичная форма, то локального экстремума в данной точке нет.

Замечание: Все параметры в этом листочке считаются положительными.

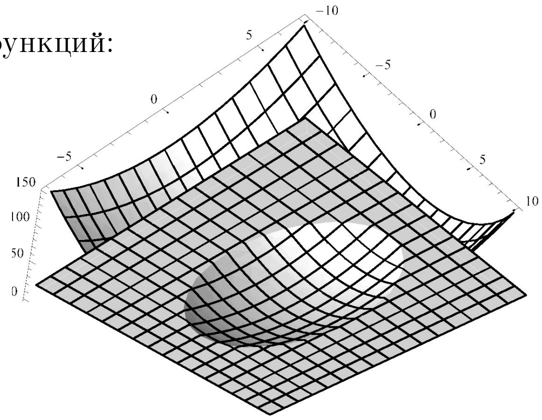
47.1. *(3651,3653)* Найдите экстремальные значения заданной неявно функции $z=z(x;\,y)$:

(а) • $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$; *(б)* $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2)$;

(в) $5z^2+4zy+y^2-2y+3x^2-6x+4=0$; *(г)* $z^2+xyz-xy^2-x^3=0$.

47.2. *(3655,3656,3660,3661,3664,3667,3668,3670)*

Найдите точки условного экстремума следующих функций:



(а) $z = \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}$, если $x^2 + y^2 = 1$;

(б) • $z = x^2 + y^2$, если $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$;

(в) • $u = x^m y^n z^p$, если $x + y + z = a$;

(г) • $u = x^2 + y^2 + z^2$, если $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \quad (a > b > c > 0)$;

(д) $u = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin z$, если $x + y + z = \dfrac{\pi}{2}, \quad (x,\ y,\ z\ >\ 0)$;

(е) $u = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$, если $\dfrac{x_1}{a_1} + \dfrac{x_2}{a_2} + \ldots + \dfrac{x_n}{a_n} = 1$;

(ж) • $u = x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p$, если $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a, \quad (p > 1)$;

(з) $u = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$, если $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a, \quad (\alpha_i > 1,\ i = \overline{1,n})$.

(и) $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$, если $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{8}$.

(к) $u = xyz$, если $xy + xz + yz = a^2$; $x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ a > 0$.

47.3. Найдите условные экстремумы функции $z = z(x;\, y)$ относительно условий связи $\varphi(x;\, y) = 0$, если:

(а) $z(x;y) = 6 - 5x - 4y, \quad \varphi(x;y) = x^2 - y^2 - 9$;

(б) $z(x;y) = x^2 - y^2, \quad \varphi(x;y) = 2x - y - 3$;

(в) • $z(x;y) = 2x^3 + 3a^2x + 2y^3 + 3a^2y, \quad \varphi(x;y) = x^2 + y^2 - a^2$.

47.4. Исследуйте, имеет ли функция $u(x;y;z) = xy+xz+yz$ условный экстремум в точке $M_0(1;1;1)$, если

$$2x^3y^2z + 4x^2 + 5y^2 + 6z^2 = 17.$$

47.5. Пусть функции $f(x;y)$ и $\varphi(x;y)$ непрерывно дифференцируемы в $\mathbb{R}^2$. Верно ли, что точки условного экстремума функции $f(x;y)$ относительно условия связи $\varphi(x;y) = 0$ является стационарными точками функции Лагранжа $\mathcal{L}(x;y) = f(x;y) + \lambda\,\varphi(x;y)$?

47.6. Воспользуйтесь методом Лагранжа для решения следующих задач:

(а) • Определите минимальное расстояние от точки $(1;4)$ до параболы $y^2 = 2x$.

(б) Найдите минимальное и максимальное расстояния от точки $(0;0)$ до точки на эллипсе

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8.$$

(в) Найдите кратчайшее расстояние от точки $(0;3;3)$ до окружности

$$\Gamma = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \bigm| x^2 + y^2 + z^2 = 1, \;\; x + y + z = 1\}.$$

(г) Найдите кратчайшее расстояние между кривыми

$$\Gamma_1 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| x^2 - y^2 = 3\}, \quad \Gamma_2 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| y = 2x\}$$

47.7. $\star$ Верно ли утверждение: если $P(\overline{x}),\ \overline{x} \in \mathbb{R}^n, -$ многочлен, то $|P(\overline{x})|$ достигает в $\mathbb{R}^n$ своего наименьшего значения?

47.8. $\star$ Докажите, что наибольшее и наименьшее значения функции

$$u = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, x_i\, x_k, \quad a_{ik} = a_{ki},$$

на сфере $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ равны наибольшему и наименьшему корню характеристического уравнения матрицы $\{a_{ik}\}$.

47.9. $\star$ Найдите наибольшее значение функции

$$f = \bigl|x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 - x_2x_4\bigr|$$

на единичном *кубе* $\{x \in \mathbb{R}^4 \bigm| |x_k| \leqslant 1,\ 1 \leqslant k \leqslant 4\}$.

47.10. $\star$ Рассмотрим матрицу:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

для которой выполняются соотношения: $\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} a_{mk}^2} = 1$ для $\forall m = 1, \dots, n$. Докажите *неравенство Адамара* для определителя этой матрицы:

$$det\mathbf{A} \leqslant 1.$$

Теорема (*Вейерштрасс*):

Пусть множество $\mathbf{X}$−замкнутое и ограниченное, а функция $f(\overline{x})$ непрерывна на $\mathbf{X}$. Тогда найдутся

$$\overline{x}_{max} \in \mathbf{X},\ \text{такой что}\ f(\overline{x}_{max}) = \max_{\mathbf{X}} f(\overline{x}),\ \text{и}\ \overline{x}_{min} \in \mathbf{X},\ \text{такой что}\ f(\overline{x}_{min}) \ = \ \min_{\mathbf{X}} f(\overline{x}).$$

Пусть функция $f(\overline{x})$ дифференцируема на множестве $\mathbf{X}$ и непрерывна вплоть до его границы. Тогда данная функция достигает своего наибольшего и наименьшего значений либо в стационарных точках, либо в граничных точках области.

48.1. *(3663)*

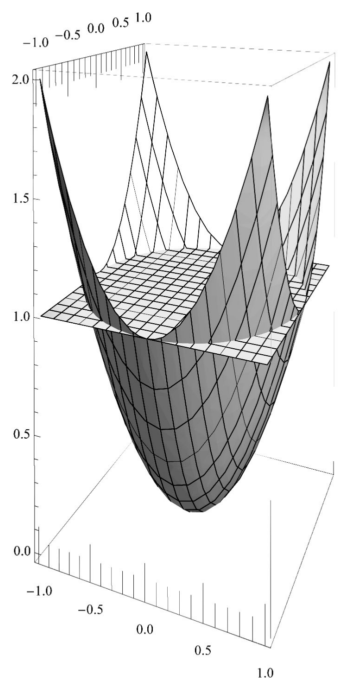
Найдите точки условного экстремума следующих функций:

(а) • $u = xyz$, если $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ \ x + y + z = 0;$

(б) $u = xy + yz$, если $x^2 + y^2 = 2,\ \ y + z = 2,\ \ \ (x,\, y,\, z\ >\ 0).$

48.2. *(3675,3676,3677,3678,3679)*

Определите наибольшее (sup) и наименьшее (inf) значения следующих функций в указанных областях:



(а) $z = x - 2y - 3$, если $0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant x + y \leqslant 1;$

(б) • $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$, если $x^2 + y^2 \leqslant 25;$

(в) $z = x^2 - xy + y^2$, если $|x| + |y| \leqslant 1;$

(г) $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, если $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 100;$

(д) • $u = x + y + z$, если $x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1;$

(е) $z = (x-2)^2 + y^2$, если $-2 \leqslant x \leqslant 1,\ -1 \leqslant y \leqslant 3.$

48.3. Представьте положительное число a в виде суммы

(а) • пяти положительных слагаемых так, чтобы их произведение имело наибольшее значение;

(б) n положительных слагаемых так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей;

(в) n положительных слагаемых так, чтобы произведение

$$f = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n},$$

где α_i – заданные числа, была наибольшим;

48.4. Определите наибольшее значение корня $n-$ ой степени из произведения положительных чисел $x_1,\ x_2, \ldots, x_n$ при условии, что их сумма равна заданному числу a. Используя эту задачу докажите, что среднее геометрическое n положительных чисел не больше их среднего арифметического.

48.5. *(геометрическая оптимизация)*

(а) • Среди всех вписанных в данный круг радиуса R треугольников найти тот, площадь которого наибольшая;

(б) Среди вписанных в эллипсоид $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ прямоугольных параллелепипедов (с рёбрами параллельными его осям) найдите тот, который имеет наименьший объём;

(в) Найдите наибольший и наименьший объём параллелепипеда среди прямоугольных параллелепипедов с полной поверхностью 144 и суммой всех рёбер 60.

(г) ⋆ Пусть точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$; $C(x_3; y_3)$ не лежат на одной прямой. Найдите на плоскости xOy такую точку, чтобы сумма её расстояний до данных точек была наименьшей.